2 Elektrotechnische Grundlagen

Inhalt:

2.1 Komplexe Darstellung sinusförmiger Größen [1]

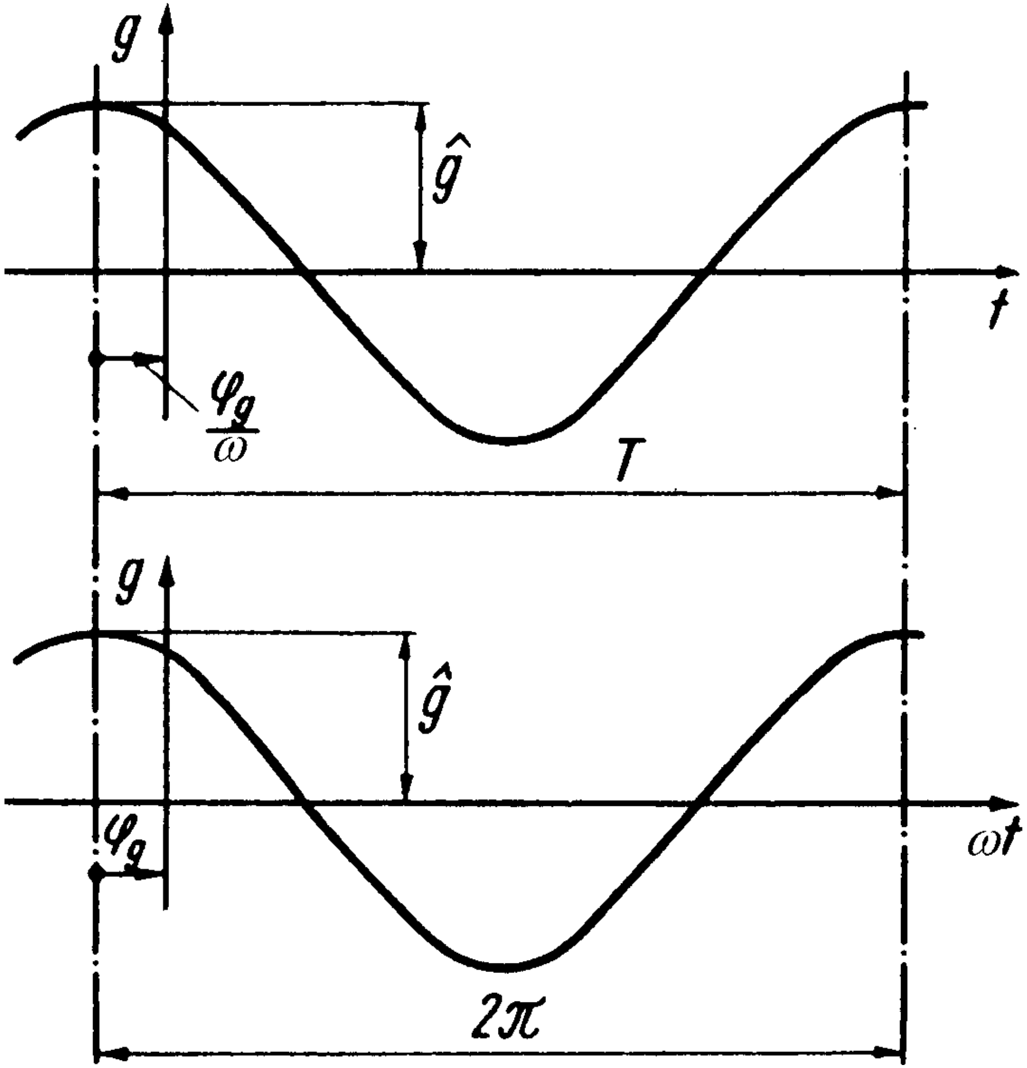


Bild 2.1:Definition einer sinusförmigen Größe

Gegeben ist eine sich sinusförmig verändernde Größe (Bild 2.1)

$$g(t) = \hat{g}\cos(\omega t + \varphi_g) \tag{2.1}$$

mit der Amplitude $\hat{g}$, und der zeitlich konstanten Kreisfrequenz ω, dem Phasenwinkel φ_g, der Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.2}$$

und der Frequenz

$$f = \frac{1}{T}. \tag{2.3}$$

Aus der allgemeinen Definition des Effektivwertes (RMS: root mean square) einer beliebig veränderlichen, aber periodischen Funktion

$$\boxed{G = G_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (g(t))^2\,\mathrm{d}t}} \tag{2.4}$$

ergibt sich im Fall einer sinusförmigen periodischen Funktion (und nur dann!!) der Effektivwert

$$G = \frac{\hat{g}}{\sqrt{2}} \tag{2.5}$$

und Gleichung (2.1) geht über in

$$g(t) = G\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_{\mathrm{g}}). \tag{2.6}$$

Mit Hilfe der Eulerschen Beziehung: $\exp jx = \cos x + j\sin x$ kann (2.6) erweitert werden:

$$g(t) = \mathrm{Re}\{\underline{g}\} = \mathrm{Re}\left\{G\sqrt{2}\exp j[\omega t + \varphi_{\mathrm{g}}]\right\} \tag{2.7}$$

In der komplexen Funktion

$$G\sqrt{2}\exp j[\omega t + \varphi_{\mathrm{g}}] = G\sqrt{2}\cdot\exp j\varphi_{\mathrm{g}}\cdot\exp j\omega t \tag{2.8}$$

treten die drei Faktoren

Effektivwert G
Phasenfaktor $\exp j\varphi_{\mathrm{g}}$
Frequenzfaktor $\exp j\omega t$

gleichberechtigt auf.

Zur Vereinfachung der Darstellung wir häufig ein komplexer Effektivwert eingeführt:

$$\boxed{\underline{G} = G\exp j\varphi_{\mathrm{g}}}. \tag{2.9}$$

Sind sämtliche veränderlichen Größen in einem System Sinusgrößen gleicher Frequenz, so kann das Zusammenwirken dieser Größen untereinander mit dem Effektivwert und dem Phasenfaktor beschrieben werden. Der Frequenzfaktor kann in allen Gleichungen "herausgekürzt" werden.

Beispiel: Spannungsgleichung einer Spule:
Allgemeine Darstellung:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

Sinusförmige Größen $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$:

$$u(t) = RI\sqrt{2}\cos(\omega t) + LI\sqrt{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega t) = RI\sqrt{2}\cos(\omega t) - \omega LI\sqrt{2}\sin(\omega t)$$

Komplexe Darstellung:

$$U\sqrt{2}\cdot\exp j\varphi_{\mathrm{u}}\cdot\exp j\omega t = RI\sqrt{2}\cdot\exp j\varphi_{\mathrm{i}}\cdot\exp j\omega t + LI\sqrt{2}\cdot\exp j\varphi_{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp[j\omega t]$$

$$\underline{U}\exp j\omega t = R\underline{I}\exp j\omega t + L\underline{I}j\omega\exp[j\omega t]$$

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I}$$

Die komplexe Wechselstromrechnung stellt eine ganz wesentliche Vereinfachung in der mathematischen Behandlung sinusförmiger Größen dar. Sie darf streng genommen ausschließlich in Systemen mit nur einer Frequenz angewendet werden.

In nichtlinearen Systemen (Eisensättigung) oder Systemen mit mehreren Frequenzen (Phasenanschnittsteuerungen, Frequenzumrichter, Netzspannung(!), ...) kann die komplexe Wechselstromrechnung nicht oder nur bedingt eingesetzt werden.

2.2 Leistung [1]

2.2.1 Mechanische Leistung

Der Augenblickswert $p_{\text{mech}}(t)$ der mechanischen Leistung lässt sich grundsätzlich aus der Kraft $f(t)$, bzw. dem Drehmoment $m(t)$ und der mechanischen Geschwindigkeit $v(t)$, bzw. Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\text{mech}}(t)$ berechnen:

$$p_{\text{mech}}(t) = f(t)v(t) \qquad p_{\text{mech}} = m(t)\omega_{\text{mech}}(t). \tag{2.10}$$

Sind Kraft/Drehmoment und Geschwindigkeit/Drehzahl zeitlich konstant (stationärer Zustand), so ergibt sich hieraus

$$\boxed{P_{\text{mech}} = Fv \qquad P_{\text{mech}} = M\omega_{\text{mech}}}. \tag{2.11}$$

2.2.2 Elektrische Leistung

Die Ermittlung der elektrischen Leistung in beliebigen Systemen erfolgt im allgemeinen Fall durch die Multiplikation der Augenblickswerte von Spannung *u(t)* und Strom *i(t)*:

$$p(t) = u(t)i(t) \tag{2.12}$$

an den zuführenden Leitungen. Sind z. B. in Drehstromsystemen mehrere Zuleitungen vorhanden, so ist über alle Zuleitungen eine Summe zu bilden.
Die Wirkleistung P ist als Mittelwert der Augenblicksleistung definiert:

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_T p(t)\cdot dt}. \tag{2.13}$$

Eine Wirkleistung P kann also nur bei einem periodischen Verlauf der Augenblicksleistung $p(t)$ angegeben werden (statischer, bzw. stationärer Zustand, Bild 2.4).

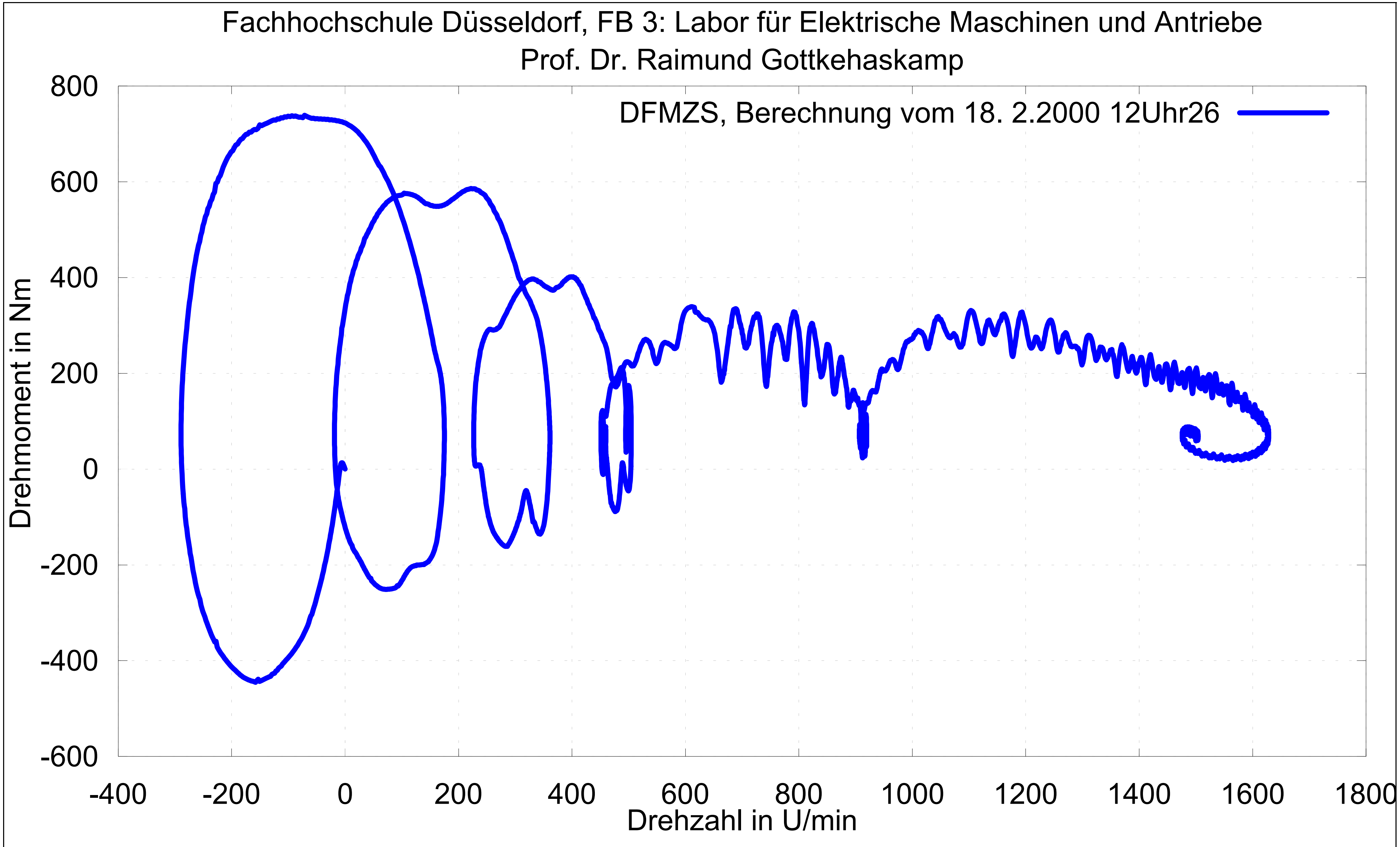


Bild 2.2: Drehmoment als Funktion der Drehzahl einer selbstanlaufenden Synchronmaschine während des Hochlaufs mit zweifachem Rotorträgheitsmoment und 70Nm Gegenmoment

Bei der Beschreibung dynamischer Vorgänge (z. B. Hochlauf, Bild 2.3) ist der Begriff der Wirkleistung unsinnig.

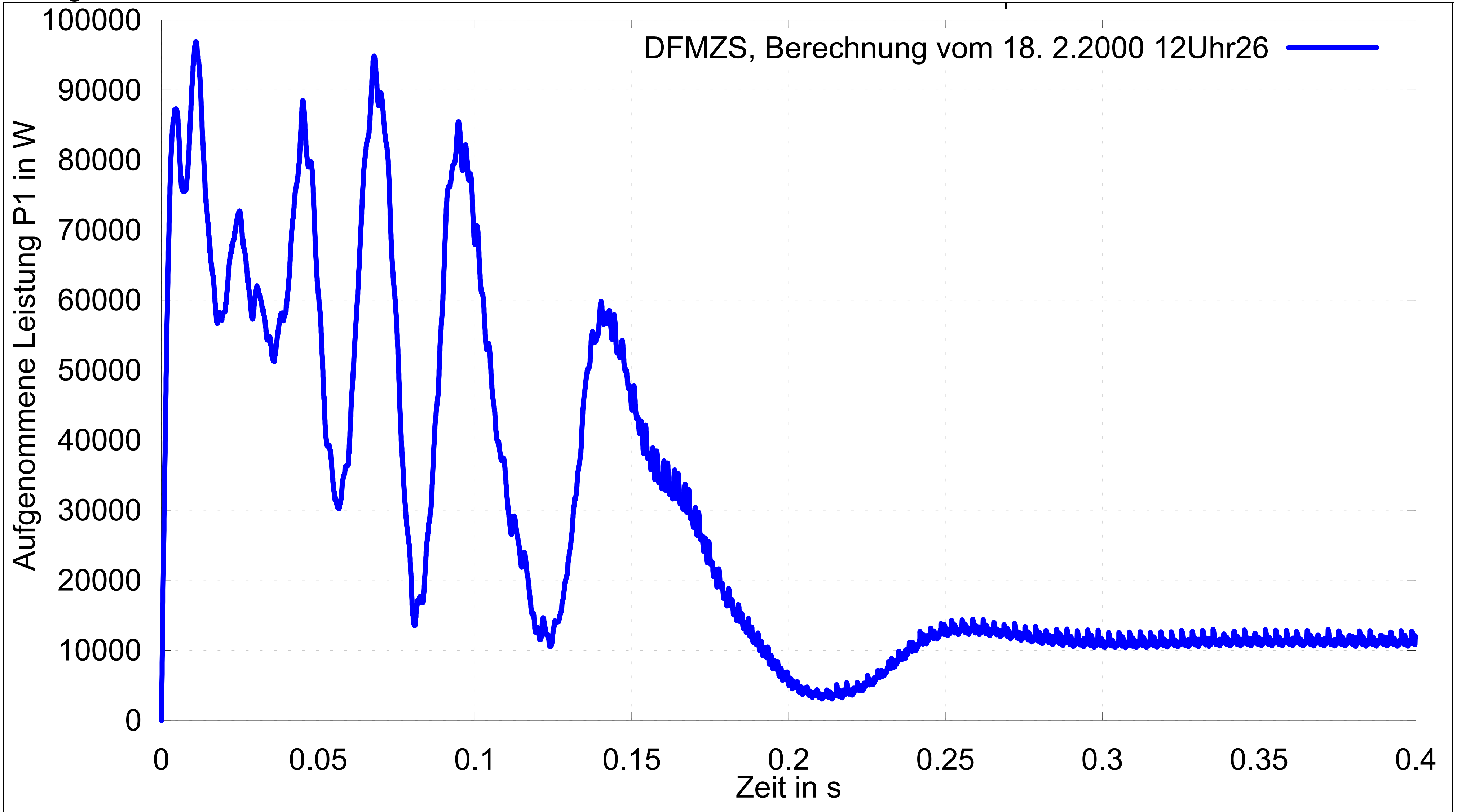


Bild 2.3: Elektrische Leistung an den Klemmen einer selbstanlaufenden Synchronmaschine während des Hochlaufs mit zweifachem Rotorträgheitsmoment und 70Nm Gegenmoment (vergl. Bild 2.2).

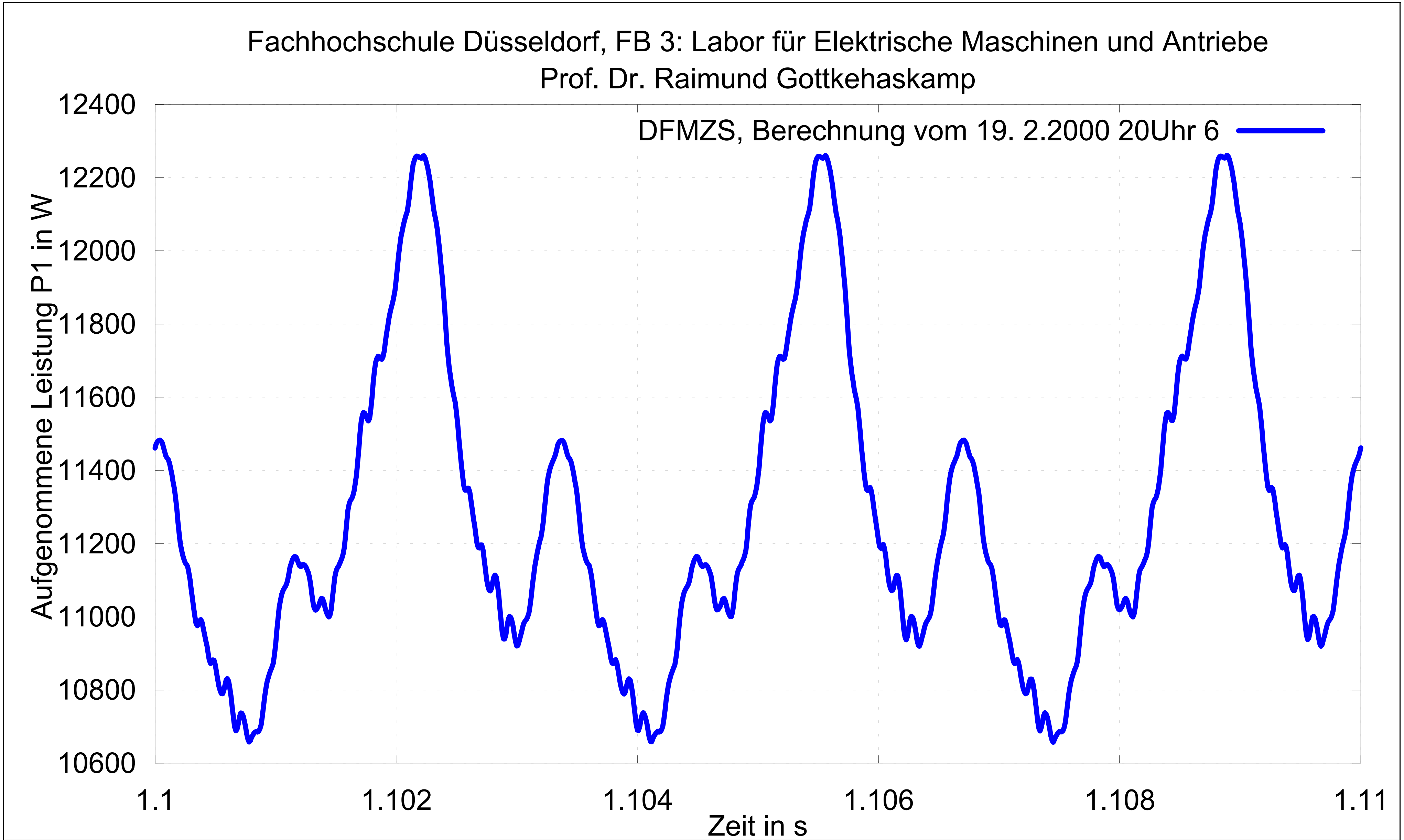


Bild 2.4: Elektrische Leistung an den Klemmen einer selbstanlaufenden Synchronmaschine im stationären Zustand (konstante Drehzahl) und 70Nm Gegenmoment. Die Wirkleistung P beträgt 11,28kW.

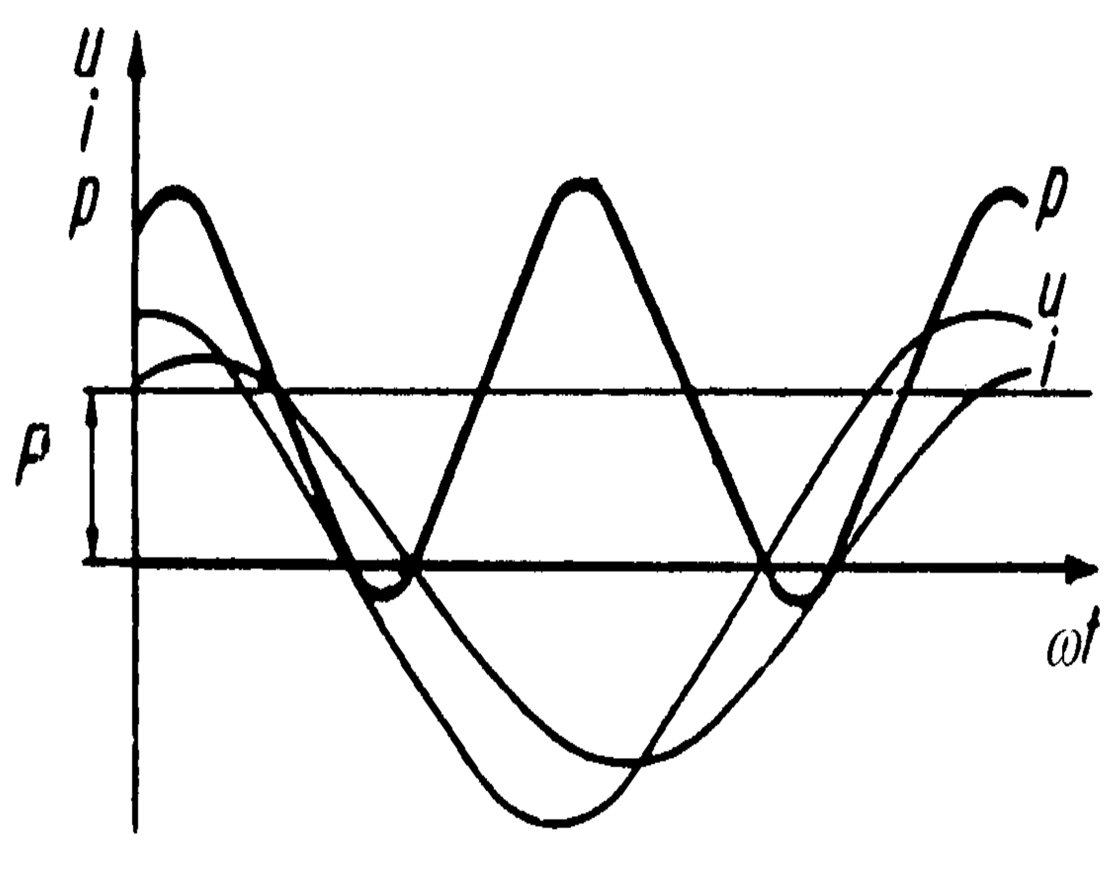


Bild 2.5: Zeitlicher Verlauf der Leistung bei sinusförmiger Spannung und sinusförmigen Strom.

Im einfachen Fall einer sinusförmiger Spannung

$$u = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_{\mathrm{u}})$$

und eines sinusförmigen Stromes

$$i = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})$$

erhält man für den Augenblickswert der Leistung:

$$p = ui = UI\cos(\underbrace{\varphi_{\mathrm{u}} - \varphi_{\mathrm{i}}}_{\varphi}) + UI\cos(2\omega t + \varphi_{\mathrm{u}} + \varphi_{\mathrm{i}})$$

mit dem Mittelwert (Wirkleistung)

$$\boxed{P = UI\cos\varphi} \tag{2.14}$$

und der Phasenverschiebung

$$\boxed{\varphi = \varphi_{\mathrm{u}} - \varphi_{\mathrm{i}}}. \tag{2.15}$$

In der komplexen Wechselstromrechnung lässt sich die Wirkleistung nach (2.14) aus der komplexen Spannung $\underline{U} = U \exp j\varphi_{\mathrm{u}}$

und dem komplexen Strom $\underline{I} = I \exp j\varphi_{\mathrm{i}}$

mit Hilfe der sogenannten **konjugiert komplexen Multiplikation** berechnen:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}\underline{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\{UI \exp j[\varphi_{\mathrm{u}} - \varphi_{\mathrm{i}}]\} = \mathrm{Re}\{UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi\}$$

Die Wirkleistung ergibt sich aus dem Realteil wie (2.14): $P = UI\cos\varphi$.

Formal können die Blindleistung

$$\boxed{Q = UI \sin\varphi} \tag{2.16}$$

und die Scheinleistung

$$\boxed{\underline{S} = S \exp j\varphi = UI \exp j\varphi} \tag{2.17}$$

eingeführt werden und es ergibt sich

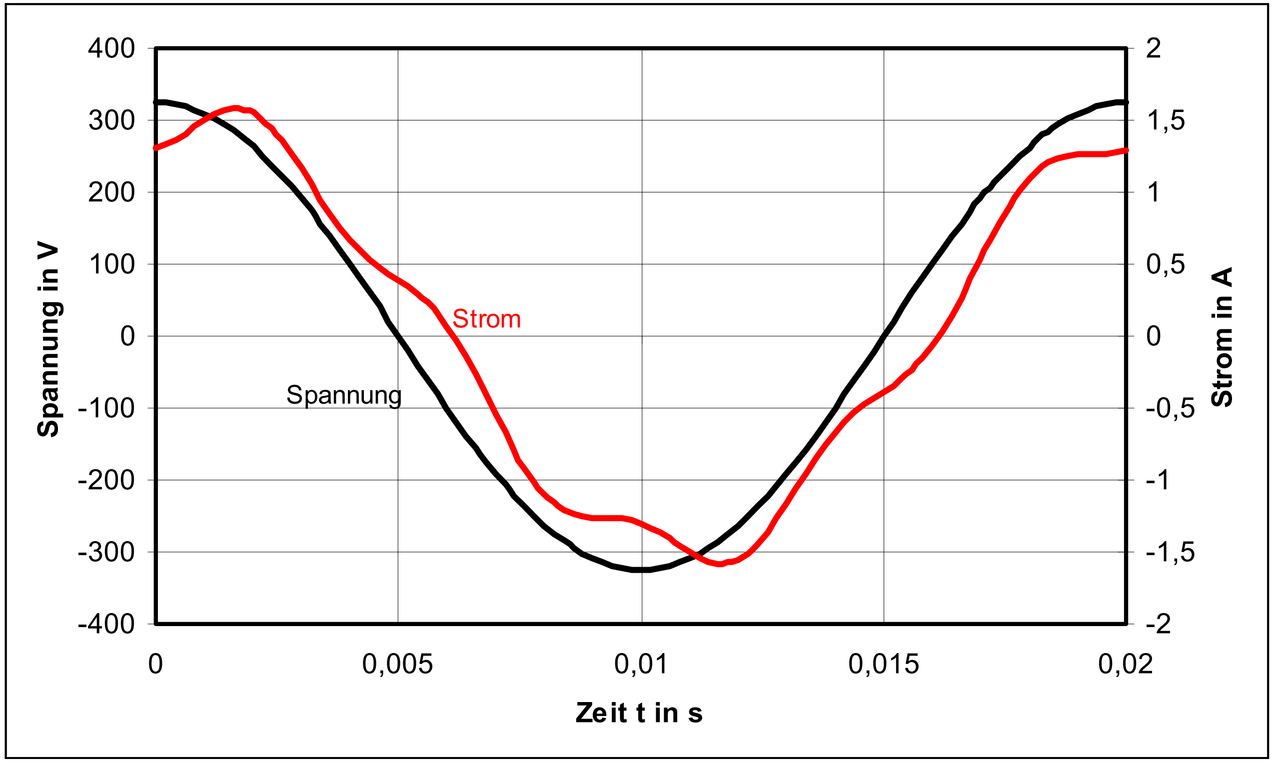
$$\boxed{\underline{S} = P + jQ}. \tag{2.18}$$

Im Gegensatz zu anderen Größen in der Wechselstromrechnung stellt die Wirkleistung eine zeitunabhängige Größe dar. Aus ihr lässt sich nicht der Augenblickswert zurückrechnen!

Scheinleistung und Blindleistung sind **mathematische Hilfsgrößen** und haben physikalisch keine Bedeutung.

2.2.3 Übung "Leistung"

Ein kleiner Wechselstromtransformator wird aus dem Netz über eine Zuleitung mit elektrischer Energie versorgt. Für Netzspannung und Netzstrom wurden folgende zeitliche Verläufe gemessen:



Eine Fourieranalyse ergab für die Netzspannung

$$u(t) = 325\,\mathrm{V}\cos\left(314\frac{1}{\mathrm{s}}t\right)$$

und für den Netzstrom:

$$i(t) = 1{,}5\,\mathrm{A}\cos\left(314\frac{1}{\mathrm{s}}t - 0{,}26\right) - 0{,}15\,\mathrm{A}\cos\left(1570\frac{1}{\mathrm{s}}t\right).$$

Die Zuleitung hat einen ohmschen Widerstand von 1Ω.

a) Wie groß ist die Netzfrequenz, welche Ordnungszahl hat die Oberschwingung im Stromsignal?
b) Geben Sie die Effektivwerte von Netzspannung und Netzstrom an.
c) Berechnen Sie die aus dem Netz entnommene Wirkleistung.
d) Wie groß ist die Verlustleistung auf der Zuleitung?
e) Welche Wirkleistung nimmt der Transformator auf?
f) Berechnen Sie die komplexen Effektivwerte der Grundschwingungen und stelle Sie diese in einem Zeigerdiagramm dar.

2.3 Drehstromsysteme [1]

2.3.1 Das symmetrische Dreiphasensystem

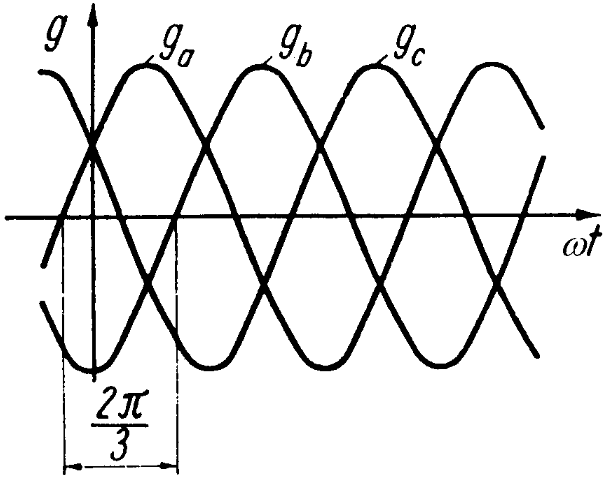


Bild 2.6: Zeitliche Verläufe sinusförmiger Größen im symmetrischen Dreiphasensystem.

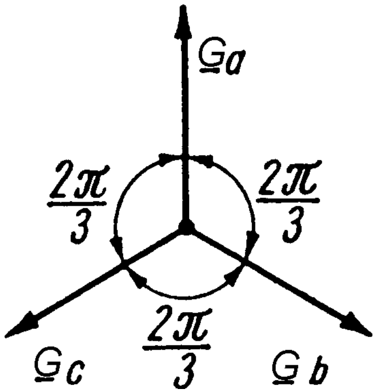


Bild 2.7: Symmetrisches Dreiphasensystem in komplexer Darstellung.

Ein symmetrisches Dreiphasensystem wird aus drei sinusförmigen Wechselstromgrößen gebildet, welche

- gleiche Frequenz,
- gleiche Amplitude und eine
- Phasenverschiebung von 120° (2π/3)

aufweisen. Eine -vereinbarungsgemäß- positive Phasenfolge ergibt sich mit:

$$\begin{aligned} g_a &= \hat{g}\cos(\omega t + \varphi_g), \\ g_b &= \hat{g}\cos(\omega t + \varphi_g - 2\pi/3), \\ g_c &= \hat{g}\cos(\omega t + \varphi_g - 4\pi/3), \end{aligned} \tag{2.19}$$

bzw. in komplexer Darstellung:

$$\begin{aligned} \underline{G}_a &= G\exp j\varphi_g, \\ \underline{G}_b &= G\exp j[\varphi_g - 2\pi/3], \\ \underline{G}_c &= G\exp j[\varphi_g - 4\pi/3]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

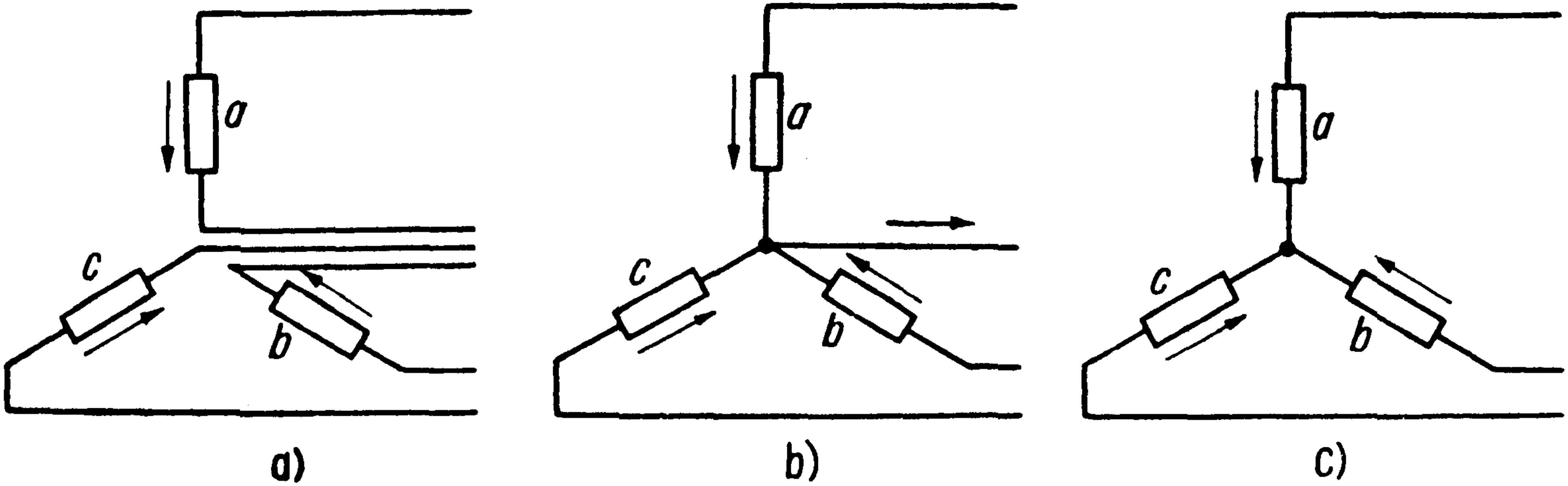


Bild 2.8: Entwicklung der Sternschaltung.

Die Entwicklung der Sternschaltung kann in einem symmetrischen Dreiphasensystem in drei Schritten erfolgen (vergl. Bild 2.8):

a) Ausgangsanordnung
b) Verschaltung mit Nulleiter
c) Wegfall des Nulleiters wegen

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0 \tag{2.21}$$

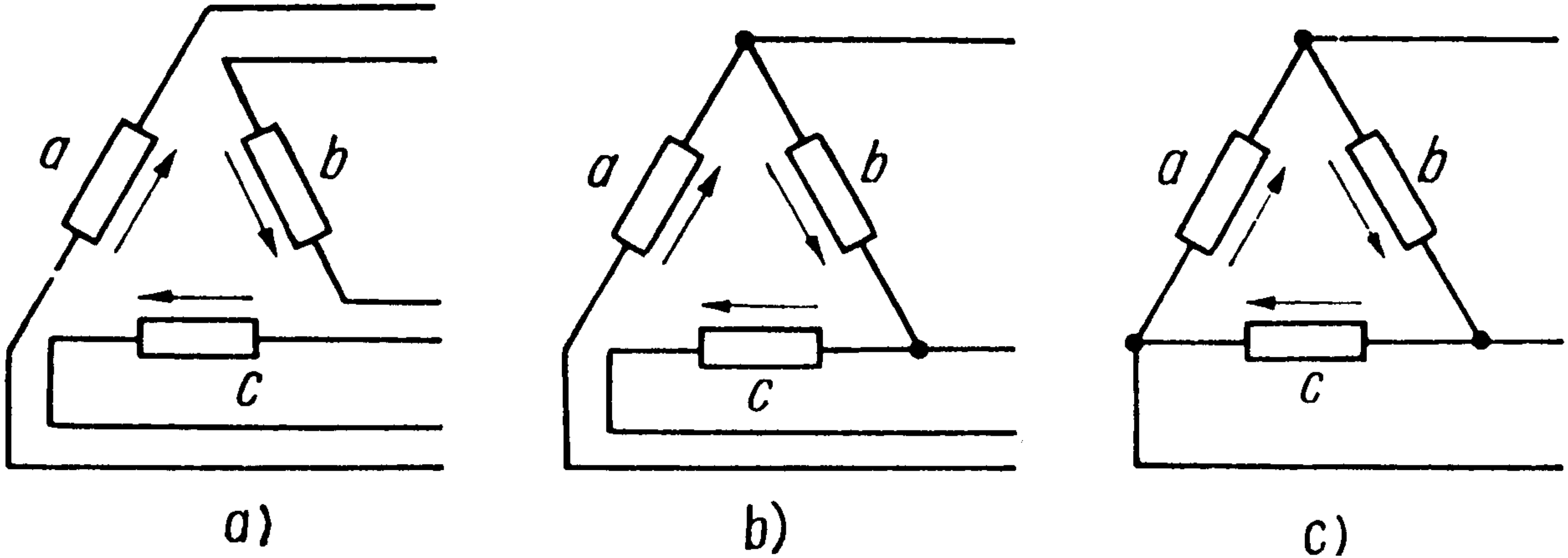


Bild 2.9: Entwicklung der Dreieckschaltung.

Entwicklung der Dreieckschaltung (Bild 2.9):

a) Ausgangsanordnung
b) Verschaltung der Zuleitung einer Phase
c) Verschaltung aller Phasen möglich wegen

$$\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c = 0 \tag{2.22}$$

Übliche Bezeichnungen und Indizes:

a, b, c; U, V, W	: Stränge
L1, L2, L3	: äußere Zuleitungen, Außenleiter
N	: Nullleiter
$\underline{U}_a$, $\underline{U}_b$, $\underline{U}_c$, $\underline{U}_{Str}$	: Strangspannungen
$\underline{I}_a$, $\underline{I}_b$, $\underline{I}_c$, $\underline{I}_{Str}$	: Strangströme
$\underline{U}_{L1}$ $\underline{U}_{L2}$, $\underline{U}_{L3}$, $\underline{U}_L$	: Stern- (Leiter-Erde-) Spannungen
$\underline{U}_{L1L2}$, $\underline{U}_{L2L3}$, $\underline{U}_{L3L1}$, $\underline{U}_{LL}$	: Leiter-Leiter-Spannungen
$\underline{I}_{L1}$, $\underline{I}_{L2}$, $\underline{I}_{L3}$, $\underline{I}_L$	: Außenleiterströme

Bemessungsspannungen (alt: Nennspannungen) von Dreiphasensystemen bzw. den zugehörigen Betriebsmitteln werden grundsätzlich als Leiter-Leiter-Spannungen angegeben und im Allgemeinen mit U_n bezeichnet.

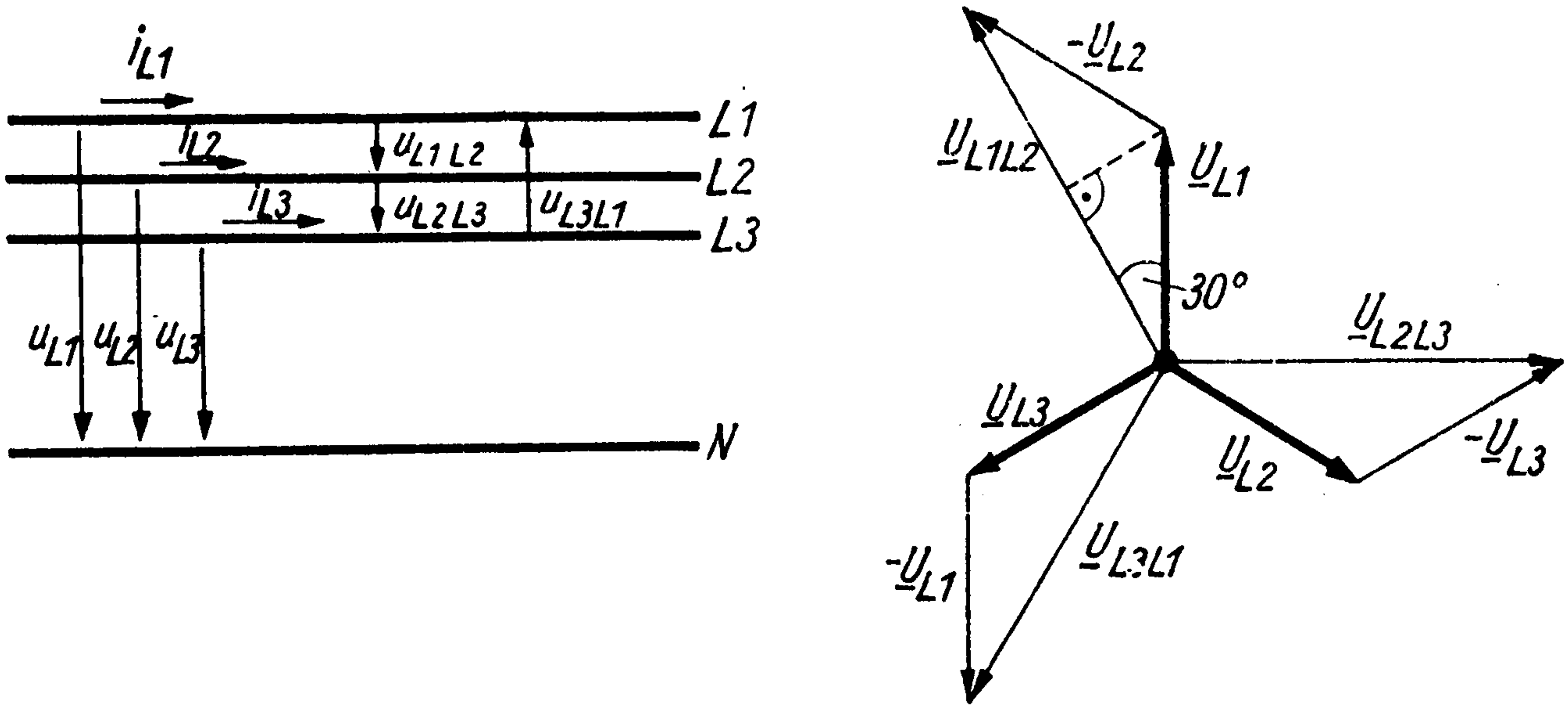


Bild 2.10: Spannungen und Ströme einer Drehstromleitung.

In einem symmetrischen Dreiphasensystem ist der Betrag der Außenleiterspannung um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als die Leiter-Erd-Spannung:

$$U_{\mathrm{LL}} = 2U_{\mathrm{L}} \cos 30° = \sqrt{3} U_{\mathrm{L}} \qquad (2.23)$$

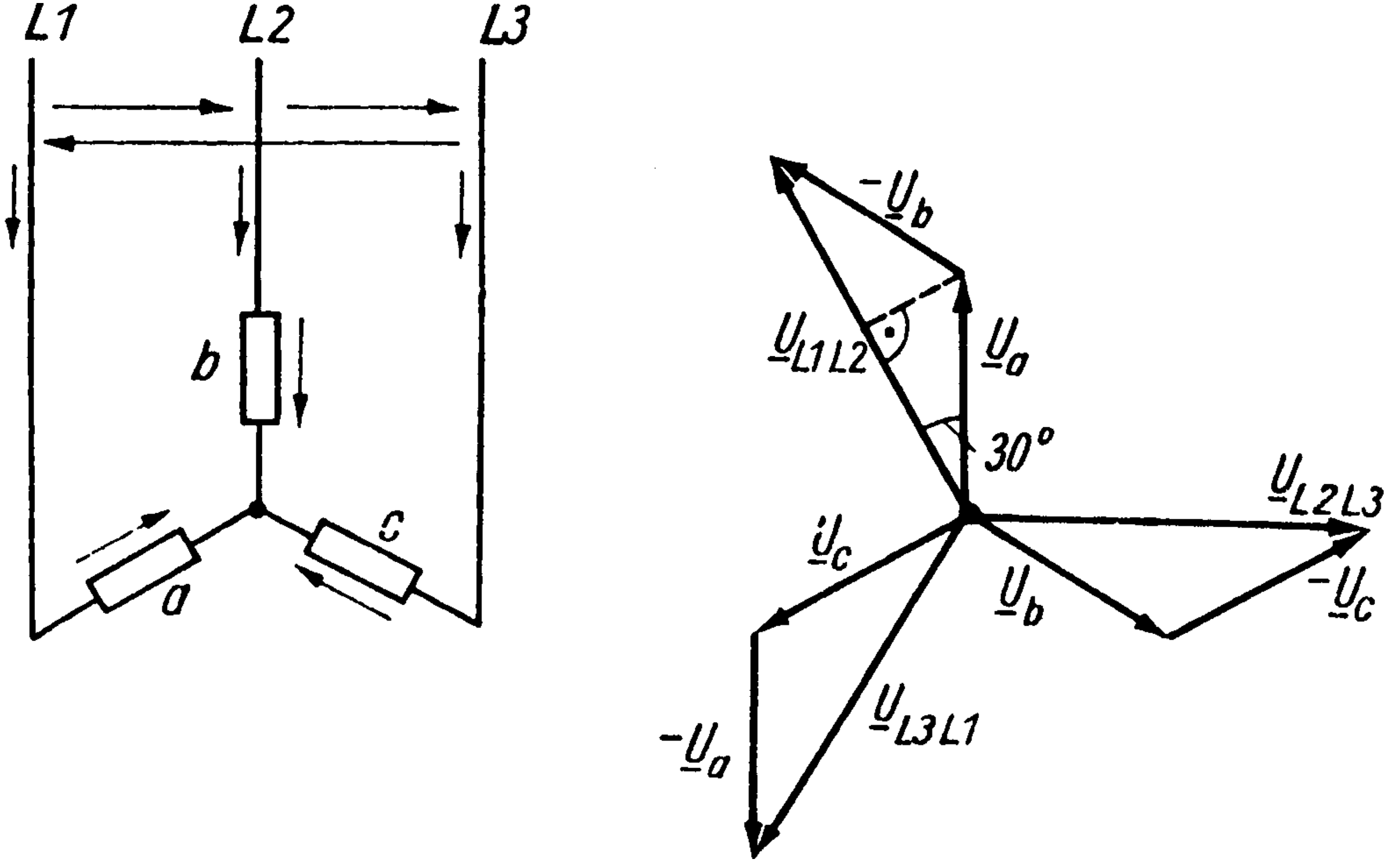


Bild 2.11: Spannungen und Ströme in einer Sternschaltung

Bei der Sternschaltung gelten folgende Zusammenhänge zwischen Außenleiter und Stranggrößen:

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{Str}} &= I_{\mathrm{L}}, \\
U_{\mathrm{Str}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\mathrm{LL}} = U_{\mathrm{L}}.
\end{aligned}
\qquad (2.24)
$$

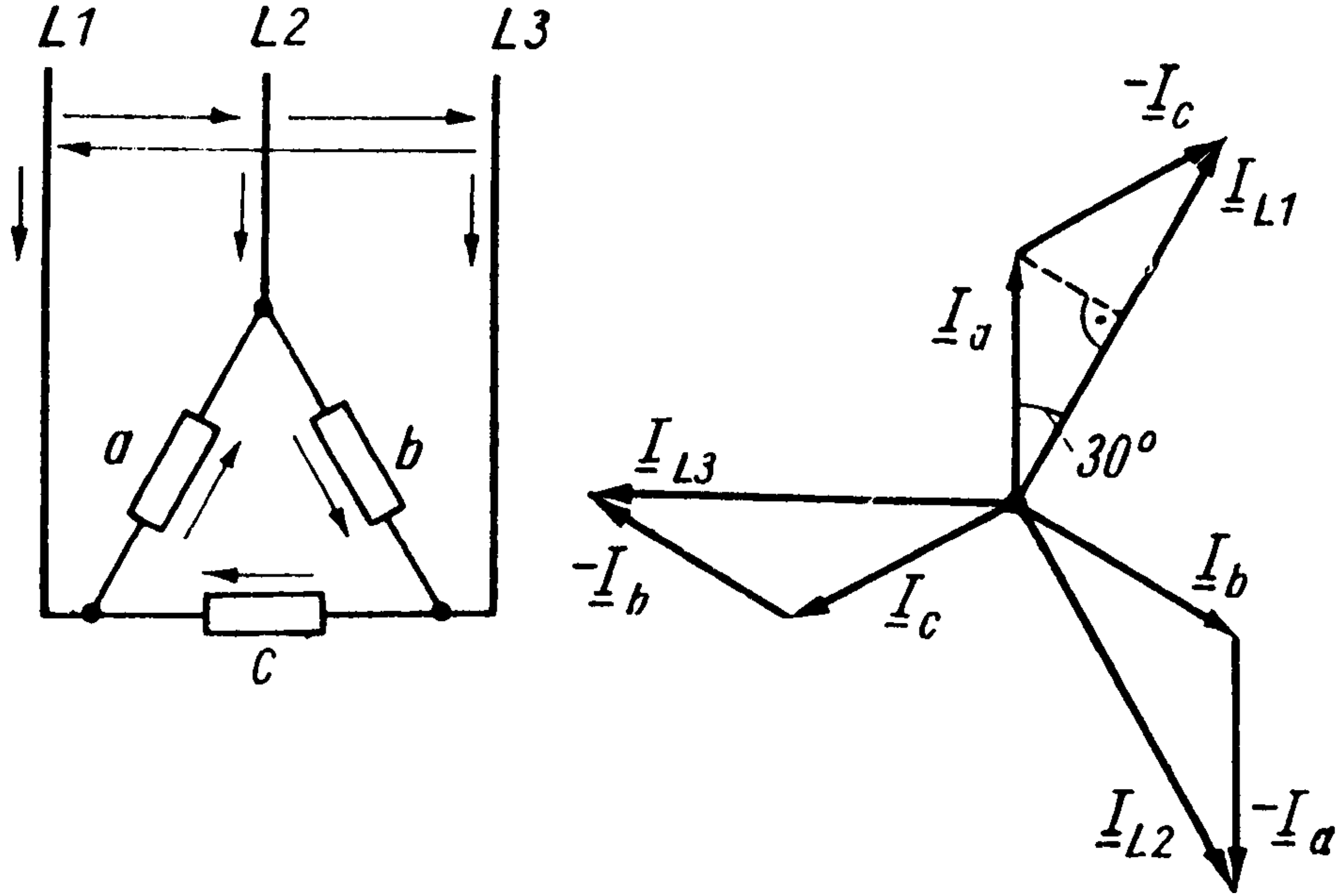


Bild 2.12: Spannungen und Ströme in einer Dreieckschaltung.

Für die Dreieckschaltung gilt

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{Str}} &= U_{\mathrm{LL}} = \sqrt{3} U_{\mathrm{L}}, \\ I_{\mathrm{Str}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} I_{\mathrm{L}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Für den Augenblickswert der Leistung in einem Drehstromsystem gilt allgemein:

$$p = u_{L1} i_{L1} + u_{L2} i_{L2} + u_{L3} i_{L3} = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c = 3 u_L i_L \,. \tag{2.26}$$

In einem symmetrischen Dreiphasensystem kann mit (2.14) die Wirkleistung berechnet werden über

$$P = 3 U_L I_L \cos\varphi = 3 U_{Str} I_{Str} \cos\varphi = \sqrt{3} U_{LL} I_L \cos\varphi = \sqrt{3} U_n I_n \cos\varphi \,. \tag{2.27}$$

Entsprechend den Gleichungen (2.16) bis (2.18) lässt sich auch hier formell die Scheinleistung

$$S = 3 U_L I_L = 3 U_{Str} I_{Str} = \sqrt{3} U_{LL} I_L = \sqrt{3} U_n I_n \tag{2.28}$$

und die Blindleistung des Dreiphasensystems angeben:

$$Q = 3 U_L I_L \sin\varphi = 3 U_{Str} I_{Str} \sin\varphi = \sqrt{3} U_{LL} I_L \sin\varphi = \sqrt{3} U_n I_n \sin\varphi . \tag{2.29}$$

2.3.2 Einphasige Ersatzanordnung:

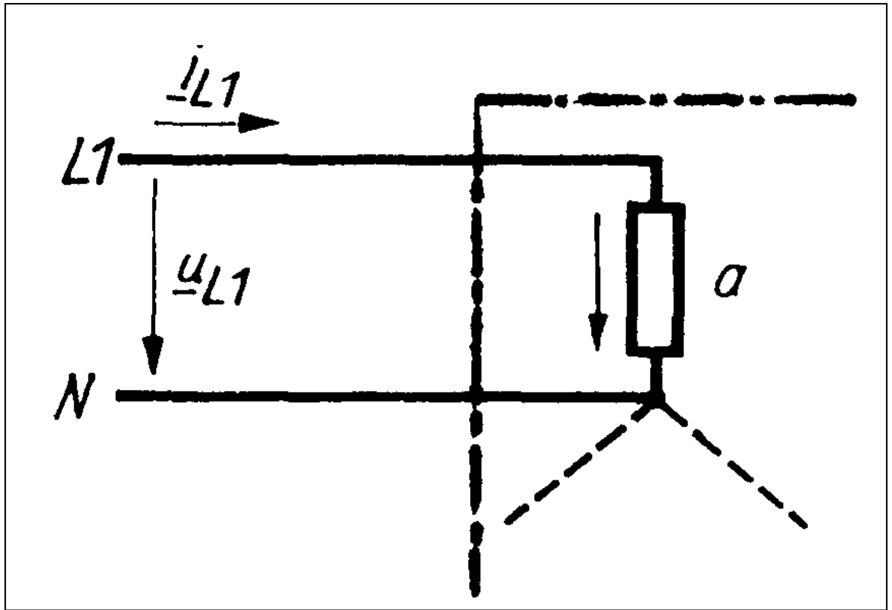


Bild 2.13: Einphasige Ersatzanordnung für die Sternschaltung.

In einem symmetrischen Dreiphasensystem genügt es, nur einen Leiter als Bezugsleiter zu betrachten und den zugehörigen Strang als Bezugsstrang auszuwählen. Ist die betrachtete Anordnung in Stern geschaltet, so ergibt sich z. B. die Verhältnisse in Bild 2.13.

Wegen der vollkommenen Symmetrie kann auf die Indizierung von Spannung und Strom verzichtet werden.

Für die Sternschaltung ergibt sich:

$$\underline{U} = \underline{U}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\mathrm{LL}} = \underline{U}_{\mathrm{L1}}, \qquad (2.30)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{\mathrm{a}} = \underline{I}_{\mathrm{L1}},$$

für die Dreieckschaltung

$$\underline{U} = \underline{U}_{\mathrm{a}} = U_{\mathrm{LL}} = \sqrt{3}\underline{U}_{\mathrm{L1}},$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{I}_{\mathrm{L1}}. \qquad (2.31)$$

2.3.3 Symmetrische Komponenten

Beliebige unsymmetrische Dreiphasensysteme sind in direkter Form mathematisch schwer zu beschreiben. Zur Vereinfachung der Berechnungen überführt man solche Systeme mit Hilfe einer Transformation in seine sogenannten symmetrischen Komponenten.

In einem beliebigen unsymmetrischen System mit drei sinusförmigen Größen $\underline{G}_{\mathrm{a}}$, $\underline{G}_{\mathrm{b}}$, $\underline{G}_{\mathrm{c}}$ erfolgt dies über die Transformationsbeziehung

$$\begin{Vmatrix} \underline{G}_0 \\ \underline{G}_{\mathrm{m}} \\ \underline{G}_{\mathrm{g}} \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{Vmatrix} \bullet \begin{Vmatrix} \underline{G}_{\mathrm{a}} \\ \underline{G}_{\mathrm{b}} \\ \underline{G}_{\mathrm{c}} \end{Vmatrix}, \qquad (2.32)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \exp j[2\pi/3], \\ \underline{a}^2 &= \exp j[4\pi/3] = \exp j[-2\pi/3]. \end{aligned} \qquad (2.33)$$

Diese symmetrischen Komponenten bestehen aus einem

- Nullsystem $\underline{G}_0$: System mit drei nach Betrag und Phase gleichen Komponenten ($\underline{G}_{0\mathrm{a}} = \underline{G}_{0\mathrm{b}} = \underline{G}_{0\mathrm{c}} = \underline{G}_0$),

- Mitsystem $\underline{G}_{\mathrm{m}}$: Symmetrisches Dreiphasensystem mit positiver Phasenfolge ($\underline{G}_{\mathrm{m,a}} = \underline{G}_{\mathrm{m}}$, $\underline{G}_{\mathrm{m,b}} = \underline{a}^2 \underline{G}_{\mathrm{m}}$, $\underline{G}_{\mathrm{m,c}} = \underline{a}\underline{G}_{\mathrm{m}}$),

- Gegensystem $\underline{G}_{\mathrm{g}}$: Symmetrisches Dreiphasensystem mit negativer Phasenfolge ($\underline{G}_{\mathrm{g,a}} = \underline{G}_{\mathrm{g}}$, $\underline{G}_{\mathrm{g,b}} = \underline{a}\underline{G}_{\mathrm{g}}$, $\underline{G}_{\mathrm{g,c}} = \underline{a}^2 \underline{G}_{\mathrm{g}}$).

Nach Transformation in die symmetrischen Komponenten können alle Berechnungen mit den bekannten einphasigen Ersatzanordnungen durchgeführt werden. Die Rücktransformation erfolgt dann über die inverse Transformationsmatrix

$$\begin{Vmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{Vmatrix} \bullet \begin{Vmatrix} \underline{G}_0 \\ \underline{G}_m \\ \underline{G}_g \end{Vmatrix}. \tag{2.34}$$

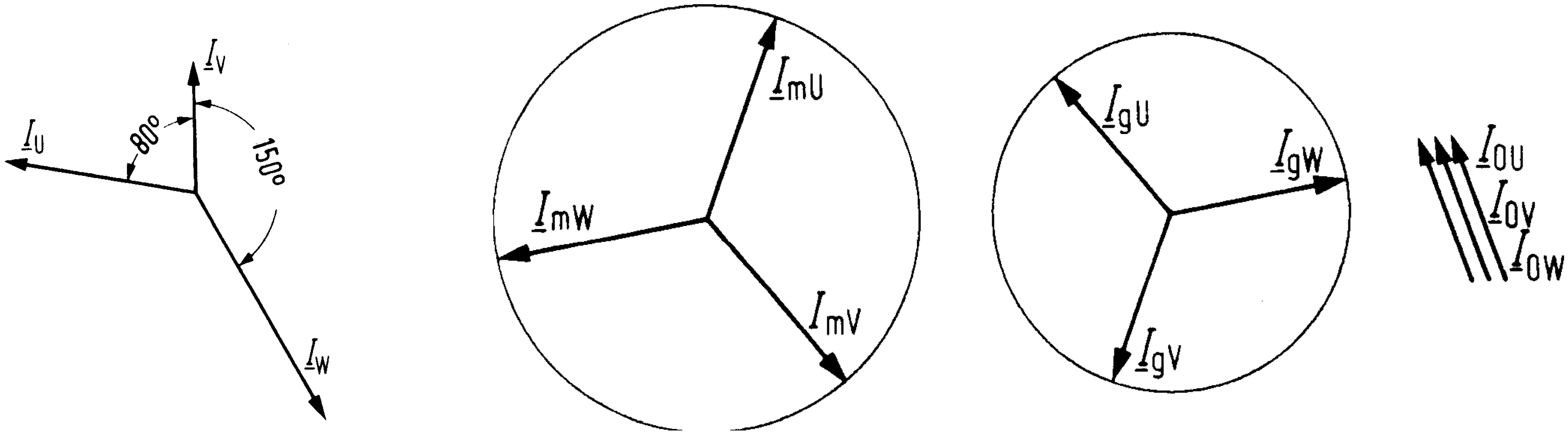


Bild 2.14: Unsymmetrisches Dreiphasensystem (Ströme in den Strängen U,V,W) und die zugehörigen symmetrischen Komponenten.

Das Vorhandensein eines Nullsystems verursacht in einer Dreieckschaltung einen Kreisstrom. Dadurch ergeben sich gegenüber der Sternschaltung deutlich erhöhte Verluste.

Eine Sternschaltung ist grundsätzlich einer Dreieckschaltung vorzuziehen, insbesondere bei Verwendung leistungselektronischer Bauteile.